CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1982

MATHEMATIQUES I (4 h)

Notations.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^{+*} = \mathbb{R}^+ - \{0\}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est la partie entière de x.

Si $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ est une fonction des deux variables x et y, on notera $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ la dérivée partielle de f par rapport à x au point (x, y), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ la dérivée partielle seconde de f par rapport à x deux fois.

On rappelle le résultat suivant : si Σu_n est une série alternée telle que $|U_{n+1}| < |U_n|$ pour $n > n_0$ et telle que $\lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$, alors Σu_n converge et $\sum_{p=n+1}^{\infty} U_p | < |U_{n+1}|$ pour $n > n_0$.

On admettra lorsque le cas se présentera $\left|\frac{\sin t}{t}\right| < 1$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-t} < t$ si $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

PARTIE I

Dans toute cette partie on suppose $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) Montrer que l'intégrale : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} \, dt$

est convergente quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et vérifier que :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} \, dt = \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad (1)$$

2) *a*) Montrer que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt$$

sont absolument convergentes ; on pose alors :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt .$$

b) Calculer $g(x)$.

3) Soit h tel que $x + h > \frac{x}{2}$.

a) Démontrer l'égalité pour :

$$t \in \mathbb{R}^+, \; e^{-(x+h)t} - e^{-xt} = th[-e^{-xt} + ht \, \Delta(t)] \quad \text{avec} \quad |\Delta(t)| < \frac{e^{-x\frac{t}{2}}}{2}$$

b) Déduire du *a*) l'inégalité : $\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + g(x)\right| < \frac{2h}{x^2}$.

[Utiliser l'inégalité précédente et la relation (1) de 1)].

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $\frac{df}{dx}(x) = -g(x)$.

4) *a*) Démontrer l'inégalité $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$.

b) Déduire de 3)*c*) et 4)*a*) en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$(2) \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tg } x .$$

.../...

PARTIE II

Soit $t \longmapsto \varphi(t)$ une fonction continue sur $]0, +\infty[$ décroissante pour $t \geqslant t_0 > 0$ et telle que :

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0 \qquad (\text{donc } \varphi(t) \geqslant 0 \text{ pour } t \geqslant t_0) .$$

1) On pose pour :

$k \in \mathbb{N}\left(k > \frac{t_0}{\pi}\right)$, $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \varphi(t) \sin t \, dt$ et pour $n_0 = E\left(\frac{t_0}{\pi}\right) + 1$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Quelle est la valeur de : $\int_{k\pi}^{k'\pi} |\sin t| \, dt$?

b) Démontrer les inégalités :

$$(1) \qquad |u_{k+1}| < |u_k| \; ; \; |u_k| < 2\varphi(k\pi) .$$

c) Démontrer que S_n a une limite finie S quand $n \to +\infty$;

et que $|S - S_k| < |u_{k+1}|$.

2) Soit $T \in \mathbb{R}^*$ tel que : $t_0 < T$, on pose $n = E\left(\frac{T}{\pi}\right)$.

a) Vérifier l'inégalité : $\left| \int_{n\pi}^{T} \varphi(t) \sin t \, dt \right| < |u_n|$.

b) Démontrer : $\lim_{T \to +\infty} \int_{t_0}^{T} \varphi(t) \sin t \, dt = \int_{t_0}^{n_0\pi} \varphi(t) \sin t \, dt + S$

$$\left| \int_{n\pi}^{+\infty} \varphi(t) \sin t \, dt \right| < |u_n| .$$

3) Démonter que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2 + x^2} \, dt \quad (x \in \mathbb{R}^*) \qquad \text{sont convergentes.}$$

PARTIE III

On suppose $x \in \mathbb{R}^*$.

1) *a*) Etudier sur $]0, +\infty[$ les variations de la fonction :

$$t \longrightarrow e^{-xt}(1 + tx) - 1,$$

en déduire que : $t \longrightarrow \frac{1 - e^{-xt}}{t}$ est continue décroissante sur $]0, +\infty[$.

b) Démontrer l'inégalité pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-xt}) \sin t}{t} \, dt \right| < \frac{2}{n\pi} < \frac{2}{n} .$$

2) Démontrer l'inégalité pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{\sin t}{t} \, dt \right| < 2nx + \frac{2}{n}$$

(on partagera $[0, +\infty[$ en deux intervalles $[0, n\pi]$ et $]n\pi, +\infty[$ et on majorera l'intégrale sur chacun de ces intervalles.)

3) *a*) En choisissant convenablement n dans 2)*b*) démontrer l'inégalité pour $x < \frac{1}{4}$

$$\left| f(x) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \right| < 6\sqrt{x}$$

b) Déduire de 1 4)*b*) et de ce qui précède :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} .$$

.../...

PARTIE IV

On pose pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{x^2 + t^2}$$

$$h(x, t) = t \sin t\,\alpha(x, t)$$

$$k(x, t) = \cos t\,\alpha(x, t)$$

$$H(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t)\, dt .$$

1) *a*) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t\, dt$.

est absolument convergente et que l'on a l'égalité :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos t\, dt .$$

b) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|t^2 - x^2|}{(t^2 + x^2)^2}\, dt$,

en déduire : $|H(x)| \leqslant \frac{1}{|x|}$.

c) Démontrer l'inégalité : $\left| H(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \right| < x^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x^2}$.

En déduire $\lim_{x \to 0} H(x)$.

2) *a*) Calculer : $\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(x, t)$.

b) Démontrer que les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\, dt , \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)\, dt , \int_0^{+\infty} k(x, t)\, dt ,$$

sont absolument convergentes et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\, dt = -x\,K(x) \qquad \text{où} \qquad K(x) = \int_0^{+\infty} k(x, t)\, dt .$$

3) x étant fixé, soient a et b deux réels donnés tels que $0 < a < x < b$.

a) Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que $a < x + u < b$, on pose :

$$\Delta(u, t) = \frac{\alpha(x + u, t) - \alpha(x, t)}{u} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$$

Vérifier l'inégalité :

$$|\Delta(u, t)| < u\, \frac{t^2 + 3b^2}{(t^2 + a^2)^3} .$$

b) Déduire de ce qui précède que les fonctions $x \longrightarrow H(x)$ et $x \longrightarrow K(x)$ sont dérivables sur :

$]0, +\infty[$ avec $\frac{dH}{dx}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\, dt$; $\frac{dK}{dx}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)\, dt$.

4) En utilisant 2)*b*) et 3)*b*) établir que pour $x > 0$, H vérifie l'équation différentielle :

$$(E)\ y'' - y = 0;$$

donner la solution générale de (E) .

5) En faisant tendre x vers 0 et vers $+\infty$, déterminer $H(x)$ [utiliser 1)*b*) et *c*)] .

En déduire $K(x)$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail